b/ d'après la question précédente :

pou $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\frac{x-0}{\cos^2 0} \le tg(x) - tg(0) \le \frac{x-0}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x \le tg(x) \le \frac{x}{\cos^2 x}$$

c/

$$x \le \frac{\sin x}{\cos x} \le \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow x.\cos(x) \le \sin(x) \le \frac{x}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1}{\cos(x)}$$

3. pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\cos(x) \le g(x) \le \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow$$

$$\cos(x) - 1 \le g(x) - g(0) \le \frac{1}{\cos(x)} - 1 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \le \frac{g(x)-g(0)}{x} \le \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right).\frac{1}{\cos(x)}$$

$$Or \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right).\frac{1}{\cos(x)} = 0$$

$$d'où \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$$

par suite g est dérivable à droite en 0 et $g_d'(0)=0$ donc C_g admet une demi-tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0 et comme g est une fonction paire alors g admet aussi une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 0 donc g est dérivable aussi à gauche en 0 et $g_g'(0)=0$

par suite g est dérivable en 0 et g'(0)=0

EX 15 :

1) * f est dérivable sur]0,1] ⇒ f est continue sur]0,1] d'où : $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est continue sur]0,1]

* continuité à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f_d'(0) = 0 = g(0)$$

g est continue à droite en 0 .

Par suite g est continue sur [0,1]

2) a) g est continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[; g(0)=g(1)=0

D'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]0,1[$ tq : g'(c)=0

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow c.f'(c) - f(c) = 0$$

b) la tangente à (ζ) au point d'abscisse c a pour équation :

T :y=f'(c).(x-c)+f(c)

T :y=f'(c).x+f(c)-f'(c).c

T :y=f'(c).x

O(0,0)∈T

EX 16 :

$(P) : y = x^2 + ax + b$

soit f(x)=x²+ax+b

(ζ_f)=(P)

f'(x)=2x+a

la tangente (T) à (P) au point d'abscisse $\frac{x_A + x_B}{2}$ a pour coefficient directeur $f'(\frac{x_A + x_B}{2}) = x_A + x_B + a$

la droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = x_A + x_B + a$$

(T) et (AB) ont le meme coefficient directeur

par suite (T) // (AB)

Qarray.tn-Agra Blech-Qarray.tn